非線形発展方程式の周期解の分岐と安定性 (応用科学における偏微分方程式の応用解析)

伊藤, 達夫

数理解析研究所講究録
386巻 1980年 109-128

非線形発展方程式の周期解の分岐と安定性

東大 教養　伊藤達夫

§1. 序

実Banach空間 X の中の n 次元パラメーター λ を含む非線形発展方程式

(1.1) $\frac{du}{dt} = Lu + N(u,\lambda)$, $t > 0$

(1.2) $u(0) = x_0$

を考える。ここで L は正則半群の生成作用素で代数的単純固有値 $\pm i$ を持ち，他の L のスペクトラムは左半（複素）平面 $\{\mu;\ \mathrm{Re}\,\mu < -c_0\}$ $(c_0 > 0)$ に含まれているとする。非線形作用素 $N(x,\lambda)$ は C^3 で $N(0,\lambda) = 0$, $D_x N(0,0) = 0$ （$D_x N(0,0)$ は $N(x,\lambda)$ の $(x,\lambda) = (0,0)$ での x に関する Fréchet 微分）とする。

対 (x,λ) が $Lx + N(x,\lambda) = 0$ を満たすとき，(x,λ) を (1.1) の定常解と呼ぶことにすると $(0,\lambda)$ は (1.1) の定常解である。十分小さな $(0,0)$ の近傍に含まれる定常解

$(0,\lambda)$ の安定性は，N に関する適当な仮定のもとで，線形化された固有値問題

$$[L + D_x N(0,\lambda)]y = \kappa y$$

の i に近い固有値 $\kappa(\lambda)$ の実部の正負によって決定される。即ち 定常解 $(0,\lambda)$ は $\mathrm{Re}\,\kappa(\lambda) < 0$ ならば安定で $\mathrm{Re}\,\kappa(\lambda) > 0$ ならば不安定である。

E. Hopf [5] は $\lambda \in R^1$ のとき 次のことを示した。

$$(1.3) \qquad \frac{\partial}{\partial \lambda}\mathrm{Re}\,\kappa(0) \neq 0$$

ならば $(x,\lambda) = (0,0)$ から non-trivial な周期解が分岐する。

また H. Weinberger [7] は条件 (1.3) を，$\mathrm{Re}\,\kappa(\lambda)$ が $\lambda = 0$ で符号を変えるという条件で置き換えても周期解が分岐することを示した。これらの条件は，$(0,\lambda)$ が $\lambda = 0$ で安定性を交代する一つの十分条件になっている。ここでは，次の分岐定理を与える。

<u>分岐定理</u>　$\lambda \in R^1$ として 定常解 $(0,\lambda)$ が $\lambda = 0$ で安定性を交代すれば $(x,\lambda) = (0,0)$ から non-trivial な周期解が分岐する。

次に簡単な例を与える。$\lambda \in R^1$ として 2 次元の常微分方程式

$$(1.4) \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + x(x^2+y^2)(\lambda - x^2 - y^2) \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} = -x + y(x^2+y^2)(\lambda - x^2 - y^2) \end{cases}$$

を考える。 $x=y=0$ は 定常解だが，線形化された固有値問題は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

となり，λ に依らずに 固有値 $\pm i$ を持つ。一方，(1.4) は $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ と変数変換すると

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = r^3(\lambda - r^2) \\ \dfrac{d\theta}{dt} = -1 \end{cases}$$

となり trivial 解 は $\lambda=0$ で安定性を交代していることが分かる。そして $\lambda > 0$ のときには

$$x(t) = \sqrt{\lambda}\cos(-t), \qquad y(t) = \sqrt{\lambda}\sin(-t)$$

なる周期解が存在する。

§2. 準備

まず 仮定を述べる。

<u>仮定 1.</u>

(i) L は X の中で 正則半群 $\{e^{tL}\}_{t\geq 0}$ を生成する。

(ii) $\pm i$ は L の固有値で，その代数的重複度は 1 である。

(iii) 正定数 c_0 が存在して

$$\sup_{\mu\in\sigma(L)\setminus\{i,-i\}} \mathrm{Re}\,\mu < -c_0$$

が成立する。ここで $\sigma(L)$ は L のスペクトラム。

<u>仮定2</u>　X_0 を分数巾 $(-L+I)^\alpha$ $(0 \leq \alpha < 1)$ の定義域にグラフノルム $(\| \ \|_{X_0})$ を入れたBanach空間とすると，非線形作用素 $N(x,\lambda)$ は $X_0 \times R^n$ での $(0,0)$ の近傍から X への C^3-写像で

$$N(0,\lambda) = 0 \quad , \quad D_x N(0,\lambda) = 0$$

を満たす。

X_c を X の complexfication とすると，仮定1(ii)より $\psi \in X_c$， $\psi^* \in X_c^*$ が存在して以下が成立する。

$$\mathrm{Ker}\,(L - i) = \mathrm{span}\,\{\psi\}, \quad \langle \psi, \psi^* \rangle \neq 0$$

$$\langle x, \psi^* \rangle = 0 \qquad (\forall\, x \in R(L - i))$$

実Banach空間 X で考えたいから

$$\psi = \varphi_1 + i\varphi_2 \quad , \quad \varphi_j \in X \quad (j = 1,2)$$

$$\psi^*|_X = \varphi_1^* - i\varphi_2^* \quad , \quad \varphi_j^* \in X^* \quad (j = 1,2)$$

とおくと 上の関係式は 適当に規格化して

$$L\varphi_1 = -\varphi_2 \ , \qquad L\varphi_2 = \varphi_1$$

$$\langle Lx, \varphi_j^* \rangle = (-1)^{j+1} \langle x, \varphi_{j+1}^* \rangle \qquad (j = 1,2, \ 但 \ \varphi_3^* = \varphi_1^*)$$

$$\langle \varphi_j, \varphi_k^* \rangle = \delta_{jk} \qquad (j,k = 1,2)$$

となる。

次に X_0 を

$$X_0 = \mathrm{span}\,\{\varphi_1, \varphi_2\} \oplus Z_0$$

$$Z_0 = \{ x \in X_0 \ ; \ \langle x, \varphi_j^* \rangle = 0 \ , \ j = 1, 2 \}$$

と直和に分解し，X_0 から $\mathrm{span}\{\varphi_1 \ \varphi_2\}$，$Z_0$ への projection を，各

$$P x \equiv \langle x, \varphi_1^* \rangle \varphi_1 + \langle x, \varphi_2^* \rangle \varphi_2$$

$$Q x \equiv x - P x$$

で定義する。　また，ノルム $\| \ \|_{X_0}$ の代りに同値なノルム

$$\|x\| \equiv \max \left\{ \sqrt{\langle x, \varphi_1^* \rangle^2 + \langle x, \varphi_2^* \rangle^2} \ , \ \|Q x\|_{X_0} \right\}$$

で以下考える。

一般に Banach 空間 Y の 0 を中心とする半径 δ の開球を $B_Y(\delta)$ で表わすことにする。

次に，いくつかの既知の結果をまとめておく。

λ を固定し，T を正の数とする。

<u>定義 2.1.</u>　関数 $u(t)$ が $[0, T)$ で (1.1)-(1.2) の解とは，次の (i)-(iv) を満たすことである。

(i) $u(t) \in C([0,T), X_0)$

(ii) $\dfrac{du(t)}{dt} \in C((0,T), X)$

(iii) $u(t)$ は $0 < t < T$ で L と N の定義域に入る。

(iv) $u(t)$ は $0 < t < T$ で (1.1) を満たし，$u(0) = x_0$ である。

(1.1) - (1.2) の解 $u(t)$ を $u(t, x_0)$ 又は $u(t, x_0, \lambda)$ と書くことにする。解の存在に関しては次の定理が成立する。

<u>定理 2.2.</u> 仮定 1, 2 が成立するとする。任意の $T>0$ に対して，$X_0 \times R^n$ での 0 の近傍 V が存在して次が成立する。各 $(x_0, \lambda) \in V$ に対して (1.1) - (1.2) は $[0, T)$ で解 $u(t, x_0, \lambda)$ を一意にもつ。$u(t, x_0, \lambda)$ を V から $C([0,T), X_0)$ への写像とみなすと，$u(t, \cdot, \cdot)$ は $C^3(V, C([0,T), X_0))$ で

$$D_{x_0} u(t, 0, 0) = e^{tL}$$

である。

証明は Krasnoselskii et al. [4]，又 M. Crandall - P. Rabinowitz [1] を参照。

次に center manifold 定理を述べる。この定理は (1.1)- (1.2) の解の安定性の問題を，2 次元の常微分方程式の問題に帰着することを可能にする強力な道具である。

<u>定理 2.3.</u> (center manifold 定理) 仮定 1, 2 の下で，正の数 δ と $\{(a_1, a_2, \lambda) ; (a_1, a_2) \in B_{R^2}(\delta), \lambda \in B_{R^n}(\delta)\}$ から $\{z \in B_{Z_0}(\delta)\}$ への C^2- 写像 z が存在して以下が成立する。

(i) $z(0, 0, \lambda) = 0 \quad (\lambda \in B_{R^n}(\delta))$, $D_{a_j} z(0,0,0) = 0, (j = 1, 2)$

(ii) (local invariance) 各 $\lambda \in B_{R^n}(\delta)$ を固定して

$$\mathcal{C}_\lambda \equiv \{ a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + z(a_1, a_2, \lambda) \ ; \ (a_1, a_2) \in B_{R^2}(\delta) \}$$

とおく。もし,

$$x_0 \in \mathcal{C}_\lambda \ , \quad u(t', x_0, \lambda) \in B_{x_0}(\delta) \quad (0 \leq {}^\forall t' \leq t)$$

ならば

$$u(t', x_0, \lambda) \in \mathcal{C}_\lambda \quad (0 \leq {}^\forall t' \leq t)$$

(iii) (local attractivity) もし,

$$u(t', x_0, \lambda) \in B_{x_0}(\delta) \quad (0 \leq {}^\forall t' \leq t)$$

ならば

(2.1) $$\| z(a_1(t'), a_2(t'), \lambda) - Q u(t', x_0, \lambda) \| \leq K_1 e^{-c_0 t'} \| z(a_1(0), a_2(0), \lambda) - Q x_0 \| \quad (0 \leq {}^\forall t' \leq t)$$

ここで, $a_j(t') \equiv \langle u(t', x_0, \lambda), \varphi_j^* \rangle$ $(j=1,2)$ で, K_1 は t と λ に依らぬ定数, C_0 は 仮定 1-(iii) の定数

(iv) 特に $N \in C^p$ $(p \geq 2)$ ならば $z \in C^{p-1}$.

証明は K. Masuda - J. Itoh [6] を参照

§3. 2次元の常微分方程式への帰着

$u(t)$ を

$$u(t) = a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + v(t) \quad (v(t) \in Z_0)$$

と分解して考えると (1.1)-(1.2) は次の微分方程式系

$$(3.1)\quad \begin{cases} \dfrac{da_j}{dt} = (-1)^{j+1} a_{j+1} + \langle N(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + v, \lambda), \varphi_j^* \rangle \quad (j=1,2) \\ \dfrac{dv}{dt} = Lv + QN(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + v, \lambda) \end{cases}$$

$$(3.2)\quad a_j(0) = a_{j,0} \quad (j=1,2),\quad v(0) = z_0$$

$(a_3 = a_1)$ と同値で

$$a_j(t) = \langle u(t), \varphi_j^* \rangle \quad (j=1,2), \qquad v(t) = Q\,u(t)$$

である。特に初期値 x_0 が $\mathcal{C}_\lambda$ に含まれるとき (3.1)-(3.2) は，次の2次元の常微分方程式と同値になることを示そう。

$$(3.3)\quad \frac{da_j}{dt} = (-1)^{j+1} a_{j+1} + f_j(a_1, a_2, \lambda) \qquad (j=1,2)$$

$$(3.4)\quad a_j(0) = a_{j,0} \qquad (j=1,2)$$

ここで f_j は

$$(3.5)\quad f_j(a_1, a_2, \lambda) \equiv \langle N(a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + z(a_1, a_2, \lambda), \lambda), \varphi_j^* \rangle \quad (j=1,2)$$

<u>命題 3.1.</u> 仮定 1, 2 の下で以下が成立する。

$x_0 \in \mathcal{C}_\lambda$ とする。もし (1.1)-(1.2) の解 $u(t, x_0)$ が $u(t, x_0) \in B_{x_0}(\delta)$ を満たすならば，$a_j(t) = \langle u(t, x_0), \varphi_j^* \rangle \ (j=1,2)$ は (3.3)-(3.4) の解である。

逆に (a_1, a_2) が (3.3)-(3.4) の解で $(a_1, a_2) \in B_{R^2}(\delta)$ ならば，$u(t) \equiv a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + z(a_1(t), a_2(t), \lambda)$ は $x_0 \equiv a_{1,0}\varphi_1 + a_{2,0}\varphi_2 + z(a_{1,0}, a_{2,0}, \lambda)$ としたときの (1.1)-(1.2) の解となる。

<u>証明</u> $\mathcal{C}_\lambda$ の local invariance と (3.3)-(3.4) の解の一意性

より従う。

<u>命題3.2.</u>　仮定1, 2が成立するとする。もし $w(t)$ が $w(t) \in B_{X_0}(\delta)$ なる (1.1) の周期解ならば, $w(t) \in \mathcal{C}_\lambda$ で, $a_j(t) \equiv \langle w(t), \varphi_j^* \rangle$ $(j = 1, 2)$ は (3.3)-(3.4) の周期解である。逆に, (a_1, a_2) が, $(a_1, a_2) \in B_{R^2}(\delta)$ なる (3.3)-(3.4) の周期解ならば, $w(t) \equiv a_1(t)\varphi_1 + a_2(t)\varphi_2 + z(a_1(t), a_2(t), \lambda)$ は (1.1) の周期解である。

<u>証明</u>　$w(t) \in B_{X_0}(\delta)$ で w が周期関数であることから $\mathcal{C}_\lambda$ の local attractivity により $w(t) \in \mathcal{C}_\lambda$ が従う。他は命題3.1 より従う。

この節の残りで, (3.3) の周期解の安定性を特徴づける条件を求める。(Marsden - McCracken [5 ; section 3] を参照)

(3.3) は, 極座標 $a_1 = r\cos\theta$, $a_2 = r\sin\theta$ を使って変換すると

$$
(3.6) \quad \begin{cases} \dfrac{dr}{dt} = R(r, \theta, \lambda) \\[2mm] \dfrac{d\theta}{dt} = -1 + \Theta(r, \theta, \lambda) \end{cases}
$$

となる。ここで

$$
\begin{aligned} R(r, \theta, \lambda) \equiv\ & f_1(r\cos\theta,\ r\sin\theta, \lambda)\cos\theta \\ & + f_2(r\cos\theta,\ r\sin\theta, \lambda)\sin\theta \end{aligned}
$$

$$\Theta(r,\theta,\lambda) \equiv \begin{cases} \frac{1}{r}\{-f_1(r\cos\theta, r\sin\theta,\lambda)\sin\theta + f_2(r\cos\theta, r\sin\theta,\lambda)\cos\theta\}, & (r \neq 0) \\ -\frac{\partial f_1}{\partial a_1}(0,0,\lambda)\cos\theta\sin\theta - \frac{\partial f_1}{\partial a_2}(0,0,\lambda)\sin^2\theta \\ \quad + \frac{\partial f_2}{\partial a_1}(0,0,\lambda)\cos^2\theta + \frac{\partial f_2}{\partial a_2}(0,0,\lambda)\sin\theta\cos\theta & (r=0) \end{cases}$$

で, $R \in C^2$, $\Theta \in C^1$, $\Theta(0,\theta,0) = 0$ である。

(3.6) の解で $r(0) = r_0$, $\theta(0) = \theta_0$ なる解を

$r(t; r_0, \theta_0, \lambda)$, $\theta(t; r_0, \theta_0, \lambda)$ と書くことにする。

<u>補題 3.3.</u> 仮定 1, 2 の下で, 正の定数 δ_1 $(<\delta)$ と C^1-写像 τ; $B_{R^1}(\delta_1) \times B_{R^n}(\delta_1) \times (-2\pi, 0] \to R^1$ が存在して

$$\theta(\tau(r_0,\lambda,\theta_0); r_0, \theta_0, \lambda) = -2\pi$$

$$\tau(0, 0, \theta_0) = 2\pi + \theta_0$$

<u>証明</u> $\Theta(0,\theta,0) = 0$ より, $\theta(2\pi+\theta_0; 0, \theta_0, 0) = -2\pi$ また, $\frac{\partial\theta}{\partial t}(2\pi+\theta_0; 0, \theta_0, \lambda) = -1$ より 陰関数定理を適用すると, 主張が従う。

" Poincaré 写像 " を

(3.7) $p(r,\lambda) \equiv r(\tau(r,\lambda,0); r, 0, \lambda)$

で定義する。補題 3.3 より $p \in C^1$ である。(3.3) の周期解の存在とその安定性は, 次の2つの補題によって, 1次元の写像 $p(\cdot,\lambda)$ の不動点の存在とその安定性によって決まる。

<u>補題 3.4.</u> r が $p(\cdot,\lambda)$ の不動点ならば,

$$(3.8)\quad \begin{cases} a_1(t) \equiv r(t;r,0,\lambda)\cos\theta(t;r,0,\lambda), \\ a_2(t) \equiv r(t;r,0,\lambda)\sin\theta(t;r,0,\lambda) \end{cases}$$

は (3.3) の周期解である。逆に, $(a_1(t), a_2(t))$ が $|a_1(0)| < \delta_1$, $a_2(0) = 0$ なる (3.3) の周期解ならば, $a_1(0)$ は $P(\cdot,\lambda)$ の不動点である。

__補題 3.5.__ $P(\cdot,\lambda)$ の不動点 r と (3.8) で与えられる (3.3) の周期解 $(a_1(t), a_2(t))$ の軌道安定性は同じである。

$P(\cdot,\lambda)$ の不動点 $r(\geq 0)$の安定性を特徴づける条件を求めよう。

__補題 3.6.__ (Marsden - McCracken [5 ; Lemma 3.7])

$$\frac{\partial P}{\partial r}(0,0) = 1$$

必要ならば, δ_1 を小にとって, すべての $(r,\lambda) \in B_R(\delta_1)\times B_{R^n}(\delta_1)$ に対して $\frac{\partial P}{\partial r}(r,\lambda) > 0$ となるようにすると, 不動点 r の安定性は $P(\ ,\lambda)$ の r の近傍の値によって完全に特徴づけられる。全ての可能な場合は次で与えられる。

I(+) r の近くの $r' > r$ に対して $P(r',\lambda) < r'$

II(+) 数列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $r_k \downarrow r$ で $P(r_k,\lambda) = r_k$

III(+) r の近くの $r' > r$ に対して $P(r',\lambda) > r'$

I(−) r の近くの $r' < r$ に対して $P(r',\lambda) > r'$

II(−) 数列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ が存在して $r_k \uparrow r$ で $P(r_k,\lambda) = r_k$

III(−) r の近くの $r' < r$ に対して $P(r',\lambda) < r'$

<u>補題 3.7.</u>　$P(\cdot,\lambda)$ の不動点 $r(\geq 0)$ の安定性は

(3.9)

	I(+)	II(+)	III(+)
I(−)	漸近安定	安定	不安定
II(−)	安定	安定	不安定
III(−)	不安定	不安定	不安定

この表の読み方は，例えば，I(+) と I(−) が成立するならば，不動点 r は漸近安定である，というふうに読む。

補題 3.5 と補題 3.7 より $r(\geq 0)$ に対応する (3.3) の周期解 $(a_1(t), a_2(t))$ の安定性は (3.9) で与えられるが，実は $(a_1(t), a_2(t))$ に対応する (1.1) の周期解 $w(t,r,\lambda) \equiv a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + z(a_1,a_2,\lambda)$
$w(0,r,\lambda) = r\varphi_1 + z(r,0,\lambda)$
の安定性も (3.9) で与えられる（安定性定理，次節参照）。

最後に，(1.1) の周期解 $w(t,r,\lambda)$ の Poincaré 写像と $P(\cdot,\lambda)$ との間の関係を与える。

<u>補題 3.8</u>　$0<r<\delta_1$ とする。このとき，正定数 δ_2 と $V' \equiv \{ y = r'\varphi_1 + z(r',0,\lambda) + \tilde{z} \ ;\ |r'-r| < \delta_2,\ \tilde{z} \in B_{Z_0}(\delta_2) \}$ から R^1 への C^2-写像 $\tau(y;r,\lambda)$ が存在して，

$$\langle u(\tau(y;r,\lambda), y, \lambda),\ \varphi_2^* \rangle = 0 \qquad (\forall y \in V')$$

$$\tau(r'\varphi_1 + z(r',0,\lambda);\ r,\lambda) = \tau(r',\lambda,0) \qquad (|r'-r|<\delta_2)$$

ここで，τ は補題 3.3 中の τ。

(1.1)の周期解 $w(t,r,\lambda)$ の Poincaré 写像を

$$\mathbb{P}(y;r,\lambda) \equiv u(\tau(y;r,\lambda), y, \lambda)$$

で定義すると，

定理 3.9.　r を $0<r<\delta_1$ なる $p(\cdot,\lambda)$ の不動点とすると，$\frac{\partial p}{\partial r}(r,\lambda)$ は $D_y \mathbb{P}(r\varphi_1 + z(r,0,\lambda);r,\lambda)$ の固有値で，固有ベクトルは $\varphi_1 + D_{a_1} z(r,0,\lambda)$ である。

証明　p と $\mathbb{P}$ の定義より，$r'=r$ の近くで，

$$p(r',\lambda) = \langle \mathbb{P}(r'\varphi_1 + z(r',0,\lambda);r,\lambda), \varphi_1^*\rangle$$

$$\mathbb{P}(r'\varphi_1 + z(r',0,\lambda);r,\lambda) = \langle \mathbb{P}, \varphi_1^*\rangle \varphi_1 + z(\langle \mathbb{P},\varphi_1^*\rangle,0,\lambda) \tag{3.10}$$

が成立する。(3.10) の両辺を $r'=r$ で微分し，

$\mathbb{P}(r\varphi_1+z(r,0,\lambda);r,\lambda) = r\varphi_1 + z(r,0,\lambda)$ に注意すると，

$$D_y \mathbb{P}(r\varphi_1 + z(r,0,\lambda))[\varphi_1 + D_{a_1} z(r,0,\lambda)]$$
$$= \frac{\partial p(r,\lambda)}{\partial r}[\varphi_1 + D_{a_1} z(r,0,\lambda)]$$

を得る。

§4.　主要結果と分岐定理の証明

主要結果は，次の2つの定理で与えられる。

分岐定理　仮定1, 2が成立するとする。λをスカラーとする。このとき (1.1) の定常解 $(0,\lambda)$ が $\lambda=0$ で安定性を交代するならば，$(x,\lambda)=(0,0)$ から non-trivial な周期解が分岐する。

安定性定理　仮定1, 2が成立するとする。(1.1) の周期解 $w(t,r,\lambda)$ （$w(0,r,\lambda) = r\varphi_1 + z(r,0,\lambda)$）の安定性は

表(3.9) で与えられる。

注意 4.1. $w(t,0,\lambda)$ $(\equiv 0)$ のときは I(+) (各 II(+), III(+)) が成立するならば I(−) (各 II(−), III(−)) が成立する。

安定性定理から分岐定理を導びく。

分岐定理の証明 $(0,\lambda)$ が $\lambda<0$ のとき安定で, $\lambda>0$ のとき不安定となっていることを示す。今 $\lambda_0>0$ が存在して, $\lambda\in(0,\lambda_0)$ に対して III(+) が, $\lambda\in(-\lambda_0,0)$ に対して I(+) が成立したとする。このとき各 $\lambda\in(0,\lambda_0)$ に対して $r_\lambda\downarrow 0$ $(\lambda\downarrow 0)$ が存在して $P(r_\lambda,-\lambda)-r_\lambda$ が負で, $P(r_\lambda,\lambda)-r_\lambda$ が正 が成立する。平均値の定理により, $\lambda'\in(-\lambda,\lambda)$ が存在して $P(r_\lambda,\lambda')-r_\lambda=0$ が成立する。これは, 命題 3.2, 補題 3.4 より $(x,\lambda)=(0,0)$ から, (1.1) の周期解が分岐していることを意味している。次に, 上記の λ_0 が存在しないとすると $(0,\lambda)$ に関する仮定より, $(r_n,\lambda_n)\to(0,0)$ $(r_n\neq 0)$, $P(r_n,\lambda_n)=r_n$ なる $\{(r_n,\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ が存在するから, $(x,\lambda)=(0,0)$ から (1.1) の周期解が分岐している。

§5. 安定性定理の証明

まず (1.1) の周期解 $w(t,r,\lambda)$ の安定多様体を思い出しておく。詳しくは, M. Ito [2] 及び H. Kielhöfer [3]

等を参照されたい。

(1.1) の周期解 w , $(z, \lambda) \in Z_0 \times R^n$ に対して $C([0,\infty), X_0)$ での積分方程式

$$(5.1) \qquad v(t) = e^{t(L+c_0)} z + \int_0^t e^{(t-\tau)(L+c_0)} Q e^{c_0 \tau} \{ N(e^{-c_0\tau} v(\tau) + w(\tau+s), \lambda) - N(w(\tau+s), \lambda) \} d\tau - \int_t^\infty e^{(t-\tau)(L+c_0)} P e^{c_0\tau} \{ N(e^{-c_0\tau} v(\tau) + w(\tau+s), \lambda) - N(w(\tau+s), \lambda) \} d\tau$$

を考える。

<u>命題 5.1.</u> 仮定 1, 2 の下で，正の定数 $\delta_3 \, (<\delta_1)$ が存在して次が成立する。

$\max_{0\le t} \|w(t)\| < \delta_3$, $z \in B_{Z_0}(\delta_3)$, $|\lambda| < \delta_3$ に対して，(5.1) は $C([0,\infty), X_0)$ での十分小な 0 の近傍で一意解 $v(t, s, z; w, \lambda)$ をもち，各 w, λ を固定すると，

$$v(0, s, z; w, \lambda) \in C^2(R^1 \times B_{Z_0}(\delta_3), X_0)$$

$$v(0, s, 0; 0, \lambda) = 0, \qquad D_z P v(0, s, 0; 0, 0) = 0$$

である。

$$\mathcal{M}(w, s, \lambda) \equiv \{ w(s) + v_1(s, z; w, \lambda)\varphi_1 + v_2(s, z; w, \lambda)\varphi_2 + z \; ; \; z \in B_{Z_0}(\delta_3) \}$$

$$(5.2) \qquad v_j(s, z; w, \lambda) \equiv \langle v(0, s, z; w, \lambda), \varphi_j^* \rangle \quad (j = 1, 2)$$

とおくと，

<u>定理 5.2</u>（安定多様体定理）　仮定 1, 2 が成立するとする。$w(t, r, \lambda)$ を $\max_{0 \leq t} \|w(t, r, \lambda)\| < \delta_3$ なる (1.1) の周期解とする。(i) もし $x_0 \in \mathcal{M}(w, s, \lambda)$ ならば，(1.1)-(1.2) の解は $[0, \infty)$ で存在して

$$(5.3) \qquad \begin{aligned} &\|u(t, x_0, \lambda) - w(t+s, r, \lambda)\| \\ &\qquad \leq K_2 e^{-C_0 t} \|x_0 - w(s, r, \lambda)\|, \quad t > 0 \end{aligned}$$

が成立する。ここで K_2 は t, s, λ, w に依らない正の定数。

(ii) (1.1)-(1.2)の解 $u(t, x_0, \lambda)$ が

$$(5.4) \qquad \|u(t, x_0, \lambda) - w(t+s, r, \lambda)\| \leq K_3 e^{-C_0 t}, \quad t > 0$$

を満たすならば，$x_0 \in \mathcal{M}(w, s, \lambda)$。ここで，$K_3$ は t, s, w, λ に依らない正の定数。

$$\mathcal{M}(w, \lambda) \equiv \bigcup_{0 \leq s \leq \tau} \mathcal{M}(w, s, \lambda)$$

$$(\ \tau \equiv \tau(r, \lambda, 0)\ ;\ w \text{の周期})$$

とおいて，$\mathcal{M}(w, \lambda)$ を (1.1) の周期解 w の安定多様体と呼ぶ。$w \neq 0$のとき，$\mathcal{M}(w, \lambda)$ の"内側"，"外側"を定義する。

<u>補題 5.3</u>　$w \neq 0$，$\max_{0 \leq t \leq \tau} \|w(t, r, \lambda)\| < \delta_3$ なる w，$z \in B_{z_0}(\delta_3)$，$|\lambda| < \delta_3$ に対して

$$\mathcal{C}_{w,z} \equiv \bigcup_{0 \leq s \leq \tau} \{(w_1(s) + v_1(s, z; w, \lambda),\ w_2(s) + v_2(s, z; w, \lambda))\}$$

$w_j(s) \equiv \langle w(s,r,\lambda), \varphi_j^* \rangle$ $(j=1,2)$, v_j は(5.2)の v_j $(j=1,2)$

とおくと, $\ell_{w,z}$ は Jordan 閉曲線である。

<u>証明</u> 命題5.1と定理5.2の(i)より従う。

<u>定義5.4.</u> $x = a_1\varphi_1 + a_2\varphi_2 + z(a_1, a_2, \lambda) + z$, $(z \in B_{Z_0}(\delta_3))$ が $\mathfrak{M}(w,\lambda)$ の"内側"(各"外側")にあるとは, (a_1, a_2) が $\ell_{w,z}$ の内部(各 外部)に含まれることである。

$\mathfrak{M}(w,\lambda)$ の内側(各 外側)を $\mathfrak{M}_-(w,\lambda)$ (各 $\mathfrak{M}_+(w,\lambda)$)と書くことにする。

<u>補題5.5.</u> 正の定数 δ_4 $(<\delta_3)$ が存在して, 各 $\max_{0\le t\le\tau}\|w(t,r,\lambda)\| < \delta_4$ なる w, $|\lambda|<\delta_4$ に対して次が成立する。 もし, (1.1)-(1.2)の解 $u(t,x_0,\lambda)$ が

$x_0 \notin \mathfrak{M}(w,\lambda)$ で $\|u(t,x_0,\lambda)\| < \delta_4$, $t>0$, ならば

$u(t,x_0,\lambda) \notin \mathfrak{M}(w,\lambda)$, $t>0$ 。

<u>証明</u> 定理5.2より従う。

以下, 安定性定理の証明の概略を述べる。各場合ごとに考える。

I(+) または I(−) が成立するとき

I(+) のときを考えれば十分である。まず,周期解 $w(t,r,\lambda)$ が $w \neq 0$, 即ち $r \neq 0$ のときを考える。

$$V_{\delta,\varepsilon} \equiv \{ r'\varphi_1 + z(r',0,\lambda) + \xi \,;\, |r'-r| < \delta,\ \xi \in B_{Z_0}(\varepsilon) \}$$

とおく。

<u>補題 5.6.</u>　$w(t,r,\lambda) \not\equiv 0$ で I(+) が成立するとき，任意の十分小な $\delta > 0$ に対して，$\varepsilon > 0$ が存在して次が成立する。任意の $y \in V_{\delta,\varepsilon} \cap \mathcal{M}_+(w,\lambda)$ に対して

$$P(y\,;r,\lambda) \in V_{\delta,K_1\varepsilon} \cap \mathcal{M}_+(w,\lambda)$$

ここで P は w の Poincaré 写像で，K_1 は定理 2.3 中の定数。

<u>証明</u>　定理 2.3 と補題 5.5 より従う。

<u>補題 5.7.</u>　補題 5.6 の仮定の下で次が成立する。任意の $y \in V_{\delta,\varepsilon} \cap \mathcal{M}_+(w,\lambda)$ に対して

$$P^n(y\,;r,\lambda) \to w(0,r,\lambda)\ (= r\varphi_1 + z(r,0,\lambda)) \quad (n\to\infty)$$

が成立する。

<u>証明</u>

$$r_n \equiv \langle P^n(y\,;r,\lambda),\, \varphi_1^* \rangle \to r \quad (n\to\infty)$$

を示せばよい。もしある $y \in V_{\delta,\varepsilon} \cap \mathcal{M}_+(w,\lambda)$ に対して成立しないとすると，$r_{n_k} \to \tilde{r}$ なる部分列 $\{r_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ と $\tilde{r}$ $(>r)$ が存在する。定理 2.3 (iii) より

$$(5.5)\qquad y_{n_k} \equiv P^{n_k}(y\,;r,\lambda) \to \tilde{r}\varphi_1 + z(\tilde{r},0,\lambda) \quad (k\to\infty)$$

が成立する。一方 I(干) が成立するから，

$$\langle P(\tilde{r}\varphi_1 + z(\tilde{r},0,\lambda)\,;r,\lambda),\, \varphi_1^* \rangle = p(\tilde{r},\lambda) < \tilde{r}$$

$\mathbb{P}$の連続性より　$y_{\tilde{r}} \equiv \tilde{r}\varphi_1 + z(\tilde{r},0,\lambda)$ の $\{x \in X_0 ; \langle x, \varphi_2^* \rangle = 0\}$ での近傍 V' が存在して，任意の $y \in V'$ に対して

$$\langle \mathbb{P}(y;r,\lambda), \varphi_1^* \rangle < \frac{\tilde{r} + \langle \mathbb{P}(y_{\tilde{r}};r,\lambda), \varphi_1^* \rangle}{2}$$

(5.5) より　k' が存在して　$y_{n_{k'}} \in V'$。$y = y_{n_{k'}}$ として上式成立。

$\delta = \dfrac{\tilde{r} + \langle \mathbb{P}(y_{\tilde{r}};r,\lambda), \varphi_1^* \rangle}{2}$　として補題5.6を適用すると

$$\langle \mathbb{P}(y_n;r,\lambda), \varphi_1^* \rangle < \frac{\tilde{r} + \langle \mathbb{P}(y_{\tilde{r}};r,\lambda), \varphi_1^* \rangle}{2} < \tilde{r} \quad (\forall n \geq n_k)$$

これは，$r_{n_k} \to \tilde{r}$ $(k \to \infty)$ に矛盾する。（証明終）

<u>補題 5.8.</u>　$w(t,0,\lambda)\ (\equiv 0)$ のとき　I(+) が成立するならば，X_0 での 0 の近傍 V'' が存在して，任意の $x_0 \in V''$ に対して

$$u(t, x_0, \lambda) \to 0 \quad (t \to \infty)$$

<u>証明</u>　省略。

II(+) または II(−) が成立するとき

<u>補題 5.9.</u>　(1.1) の周期解 $w(t,r_1,\lambda)$，$w(t,r_2,\lambda)$, $0 \leq r_1 < r_2$ が存在するとする。このとき　$x_0 \in \mathcal{M}_+(w(t,r_1,\lambda),\lambda) \cap \mathcal{M}_-(w(t,r_2,\lambda),\lambda)$ で　$\| Q x_0 - z(\langle x_0, \varphi_1^* \rangle, \langle x_0, \varphi_2^* \rangle, \lambda) \|$ が十分小ならば

$$u(t, x_0, \lambda) \in \mathcal{M}_+(w(t,r_1,\lambda),\lambda) \cap \mathcal{M}_-(w(t,r_2,\lambda),\lambda) \quad (\forall t \geq 0)$$

<u>証明</u>　省略。

III(+) または III(−) が成立するときは　命題 3.1，補題 3.7 より，(1.1) の周期解　$w(t,r,\lambda)$ は不安定になる。

以上により安定性定理を得る。

参考文献

[1] Crandall, M.G., P.H. Rabinowitz, The Hopf bifurcation theorem in infinite dimensions, Arch. Rational Mech. Anal., 67 (1977), 53-72.

[2] Ito, M., The conditional stability of a stationary solutions for semilinear parabolic differential equations, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 25 (1979), 263-275.

[3] Kielhöfer, H., On the Lyapounov-Stability of stationary solutions of semilinear parabolic differential equations, Journal of differential equations, 22 (1976) 193-208.

[4] Krasnoselskii et al., Integral operators in spaces of summable functions, Noordhoff International Publishing (1976).

[5] Marsden, J.E., M. McCracken, The Hopf Bifurcation and its Applications. Applied Mathematical Sciences 19, Springer-Verlarg, (1976)

[6] Masuda, K., T. Itoh, On the center manifold theorem, to appear.

[7] Weinberger, H., On the stability of bifurcating solutions, Nonlinear Analysis, Academic Press, New York (1978), pp. 219-233.